LECCION 11.

LA MINIMIZACIÓN DEL GASTO.

José L. Calvo

DALE CARNEGIE®
TRAINING

LA FUNCIÓN DE DEMANDA COMPENSADA.

Cantidades que, dados unos precios de los bienes y un determinado nivel de utilidad que se desea alcanzar, minimizan el gasto.

$$\text{Min. } p_1X_1 + p_2X_2$$

$$\text{s.a. } U = U(X_1,X_2)$$

$$X_1 = X_1(p_1,p_2,U)$$

$$X_2 = X_2(p_1,p_2,U)$$

LA FUNCIÓN DE DEMANDA COMPENSADA. Propiedades (I).

ADITIVIDAD.- La suma de las funciones de demanda compensadas multiplicadas por su precio es la función de gasto, que es igual a la capacidad de compra del individuo (renta monetaria).

$$p_1\, h_1(U, p_1,p_2) + p_2\, h_2(U, p_1,p_2) = m$$

HOMOGENEIDAD.- Las funciones de demanda compensadas son homogéneas de grado 0 en los precios.

$$h_i(U, \theta p_1, \theta p_2) = h_i(U,p_1,p_2)$$

LA FUNCIÓN DE DEMANDA COMPENSADA
Propiedades (II).

TEOREMA DE YOUNG.- Las derivadas cruzadas de las funciones de demanda compensadas son simétricas.

$$\partial h_1(U,p_1,p_2) / \partial p_2 = \partial h_2(U,p_1,p_2) / \partial p_1$$

NEGATIVIDAD.- La matriz nxn formada por los elementos $\partial h_i(U,p_1,p_2) / \partial p_j$ i,j = 1,2 es semidefinida negativa, lo que obliga a que su determinante sea no positivo. Esta matriz es conocida como la *matriz de sustitución* o *matriz de Slutsky de respuestas compensadas a los precios*.

ECUACIÓN DE SLUTSKY.
(Una reinterpretación)

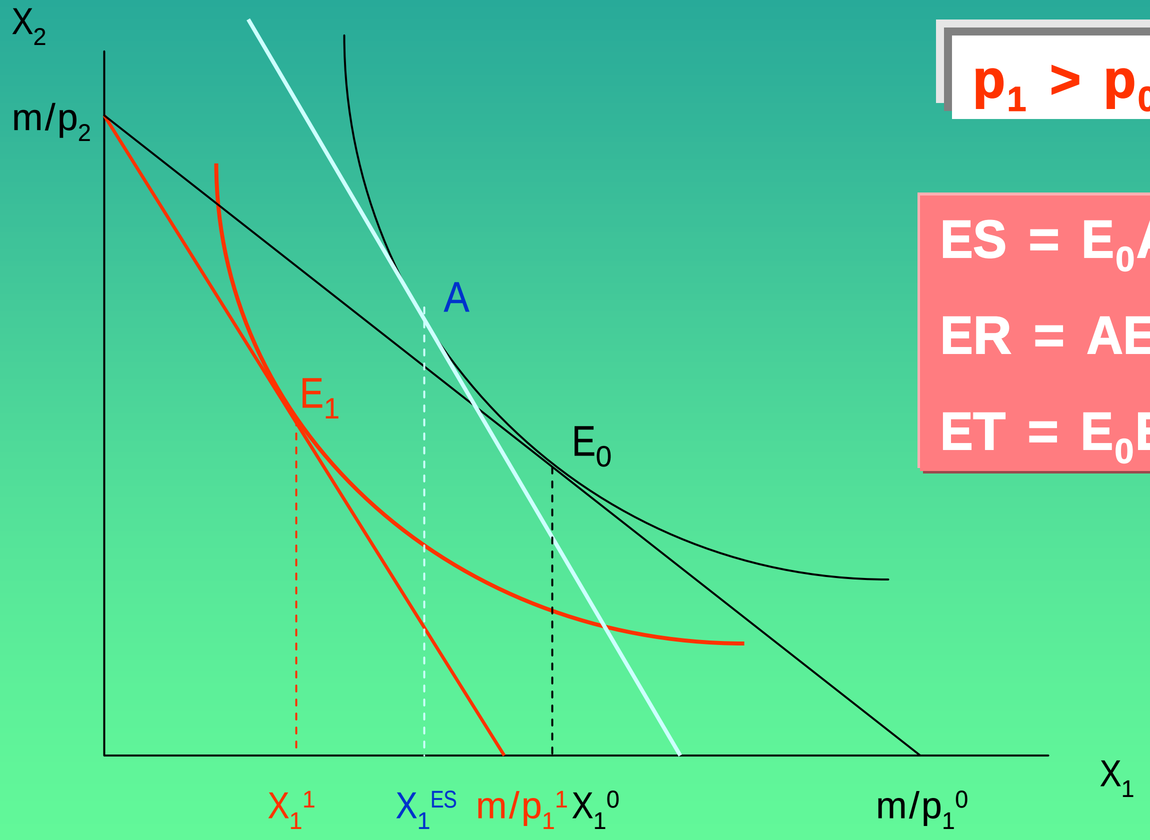
La variación en la cantidad demandada de un bien ante una variación de su propio precio puede descomponerse en dos efectos:

1. **1. *Un efecto sustitución*, que varía la cantidad demandada del bien manteniendo constante el nivel de utilidad, aproximado a través del cambio en la función de demanda hicksiana. Este efecto sustitución es no positivo.**

2. **2. *Un efecto renta*, igual al producto de la cantidad inicialmente demandada por la variación en la cantidad asociada a un cambio en la renta del individuo. Este efecto será positivo si es un bien inferior y negativo si es un bien normal.**

$$\partial g_1(m,p_1,p_2) / \partial p_1 = \partial h_1(U,p_1,p_2) / \partial p_1 - X_1(\partial g_1 / \partial m)$$

ECUACIÓN DE SLUTSKY (II).



$p_1 > p_0$

ES = E_0A

ER = AE_1

ET = E_0E_1

LA FUNCIÓN DE GASTO.

El mínimo gasto de alcanzar un determinado nivel de utilidad dados los precios de los bienes. Se obtiene sustituyendo las funciones de demanda compensadas en el elemento minimizador.

$$G(p_1,p_2,U) = p_1\, h_1\, (p_1,p_2,U) + p_2\, h_2\, (p_1,p_2,U)$$

LA FUNCIÓN DE GASTO.
Propiedades (I).

HOMOGENEIDAD.- La función de gasto es homogénea de grado 1 en los precios.

$$G(U, \lambda p_1, \lambda p_2) = \lambda\, G(U, p_1, p_2)$$

CRECIMIENTO.- La función de gasto es creciente con la Utilidad, no decreciente con los precios, y creciente al menos con un precio.

CONCAVIDAD.- La función de gasto es cóncava en los precios, de forma que cuando éstos crecen, el gasto crece no menos que linealmente.

LA FUNCIÓN DE GASTO. Propiedades (II).

CONTINUIDAD.- La función de gasto es continua en los precios, y existen tanto la primera como la segunda derivada de éstos, salvo para precios iguales a cero.

LEMMA DE SHEPHARD.- Cuando existen, las derivadas parciales de la función de gasto con respecto a los precios son las funciones de demanda compensadas.

$$X_1^1 = h_1(U, p_1^1, p_2^1) = \partial G(U, p_1^1, p_2^1) / \partial p_1$$

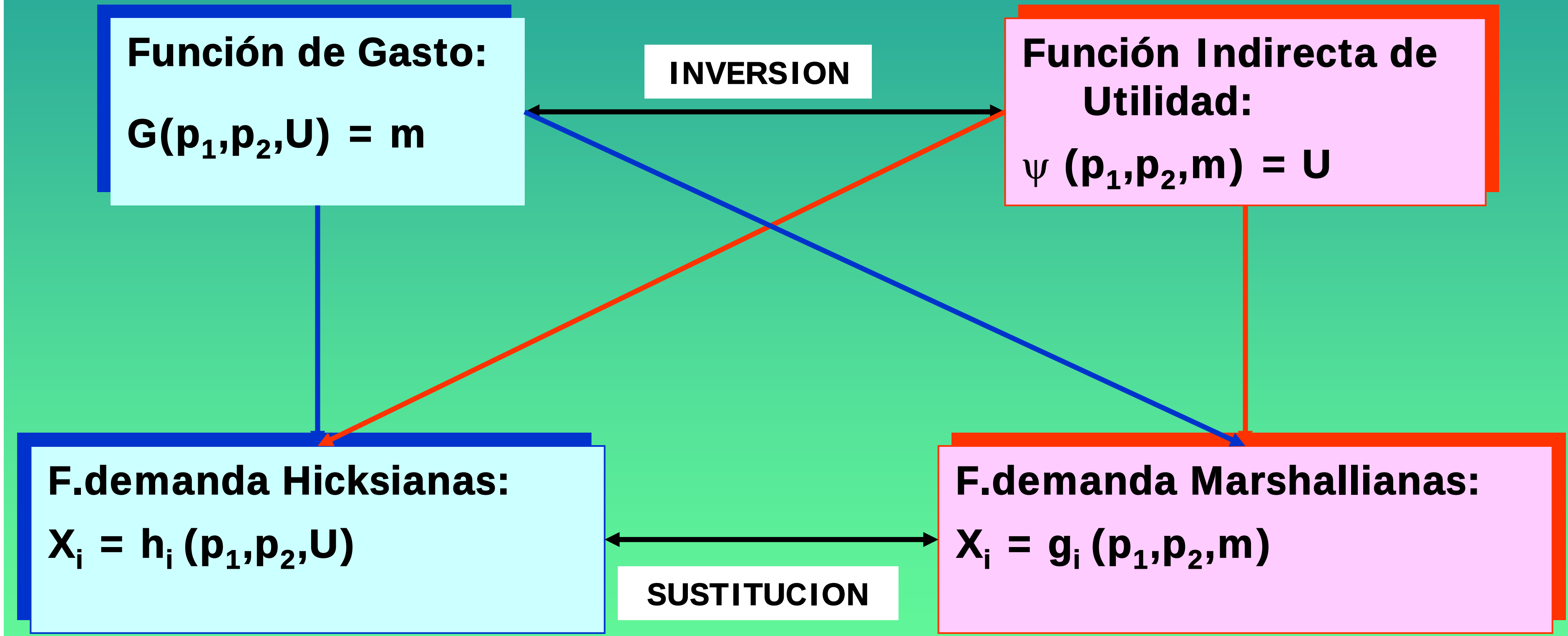
$$X_2^1 = h_2(U, p_1^1, p_2^1) = \partial G(U, p_1^1, p_2^1) / \partial p_2$$

LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD.

Máximo nivel de utilidad que se puede alcanzar dada una forma específica de la función de utilidad, una renta monetaria, y los precios de los bienes. Se obtiene sustituyendo las funciones de demanda marshallianas en la función directa de utilidad.

$$U(X_1,X_2) = U\{g_1(p_1,p_2,m),\ g_2\ (p_1,p_2,m)\} = \psi\ (p_1,p_2,m)$$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES DE GASTO Y UTILIDAD.



DUALIDAD.

Máx. $U = U(X_1, X_2)$

s. a $p_1X_1 + p_2X_2 = m$

DUALIDAD

Min $p_1X_1 + p_2X_2$

s.a. $U = U(X_1, X_2)$

F. demanda Marshallianas:

$X_i = g_i(p_1, p_2, m)$

F. demanda Hicksianas:

$X_i = h_i(p_1, p_2, U)$

F.Indirecta de Utilidad:

$\psi(p_1, p_2, m) = U$

SUSTITUCION

Función de Gasto:

$G(p_1, p_2, U) = m$

FUNCIÓN COBB-DOUGLAS.
F. de demanda Hicksianas y F. De Gasto.

$$\text{Min. } p_1X_1 + p_2X_2$$

$$\text{sujeto a } X_1^{\alpha} X_2^{\beta} = U$$

FUNCIONES DE DEMANDA HICKSIANAS:

$$X_1 = (U)^{1/(\alpha+\beta)} (\alpha p_2/\beta p_1)^{\beta/(\alpha+\beta)}$$

$$X_2 = (U)^{1/(\alpha+\beta)} (\beta p_1/\alpha p_2)^{\alpha/(\alpha+\beta)}$$

FUNCIÓN DE GASTO:

$$G = (U)^{1/(\alpha+\beta)} \{p_1 (\alpha p_2/\beta p_1)^{\beta/(\alpha+\beta)} + p_2 (\beta p_1/\alpha p_2)^{\alpha/(\alpha+\beta)}\}$$

BIENES COMPLEMENTARIOS PERFECTOS. F. de demanda Hicksianas y F. De Gasto.

$$\text{Min. } p_1X_1 + p_2X_2$$

$$\text{sujeto a } \min\{aX_1, bX_2\} = U$$

FUNCIONES DE DEMANDA HICKSIANAS:

$X_1 = U/a$

$X_2 = U/B$

FUNCIÓN DE GASTO:

$G = U(p_1/a + p_2/b)$

BIENES SUSTITUTOS PERFECTOS.
F. de demanda Hicksianas y F. De Gasto.

$$\text{Min. } p_1X_1 + p_2X_2$$

$$\text{sujeto a: } aX_1+bX_2 = U$$

FUNCIONES DE DEMANDA HICKSIANAS:

$p_1 > (a/b)p_2 \Rightarrow X_1=0;\ X_2 = U/b$

$p_1 = (a/b)p_2 \Rightarrow X_1 \in (0,U/a);\ X_2 \in (0,U/b)$

$p_1 < (a/b)p_2 \Rightarrow X_1=U/a;\ X_2=0$

FUNCIÓN DE GASTO:

$p_1 > (a/b)p_2 \Rightarrow G = p_2U/b$

$p_1 = (a/b)p_2 \Rightarrow G \in (p_1U/a,\ p_2U/b)$

$p_1 < (a/b)p_2 \Rightarrow G = p_1U/a$

PREFERENCIAS CUASILINEALES.
F. de demanda Hicksianas y F. De Gasto.

Min. $p_1X_1 + p_2X_2$

sujeto a: $\ln X_1 + X_2 = U$

FUNCIONES DE DEMANDA HICKSIANAS:

$X_1 = p_2 / p_1$

$X_2 = U - \ln(p_2 / p_1)$

FUNCIÓN DE GASTO:

$G = p_2 (1 + U - \ln p_2 / p_1)$

SISTEMA LINEAL DE GASTO.
F. de demanda Hicksianas y F. De Gasto.

Min. $\sum_i p_i X_i$

sujeto a: $U = \prod_i (X_i - \gamma_i)^{\beta i}$ $\quad$ $i = 1..n$, $\sum \beta_i = 1$

FUNCIONES DE DEMANDA HICKSIANAS:

$$p_i X_i = p_i \gamma_i + \beta_i \beta_0 U \prod_i p_i^{\beta i}$$

FUNCIÓN DE GASTO:

$$G = \sum_i p_i \gamma_i + \beta_0 U \prod_i p_i^{\beta i}$$